

УДК 621.771

В. Л. КОЛМОГОРОВ

(УрО АН СССР),

Ю. Н. ЛОГИНОВ

(Уральский политехнический институт)

### СОВМЕСТНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ПРЕССОВАНИИ ПОРИСТОЙ ЗАГОТОВКИ В КОНТЕЙНЕРЕ

Решение полной системы дифференциальных уравнений теории пластичности можно свести к поиску экстремума функционала  $I$ , составленного специальным образом [1...4]. При этом виртуальные напряжения и перемещения задаются с точностью до некоторых варьируемых параметров, которые находятся из решения вариационного уравнения  $\delta I = 0$ . Так, в рамках теории малых пластических деформаций в [4] сформулирован функционал вида

$$I = \int_V \left[ \int_0^{T'} \Lambda(T) d\tau + \int_0^{\Lambda'} T(\Lambda) d\Lambda + \int_0^{\sigma'} \varepsilon(\sigma) d\sigma + \int_0^{\varepsilon'} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon + \right. \\ \left. + \rho(\omega_i - g_i^*) u_i' \right] dV - \int_{S_f} f_i^* u_i' dS - \int_{S_u} f_i' u_i^* dS - \\ \int_{S_s} \left[ f_{vi}' u_{vi}^* + f_{\tau i}' u_{\tau i}^* - \int_0^{u_{si}'} f_{\tau}(u) du - \int_0^{f_{\tau i}'} u_{si}(f)^* df \right] dS,$$

где  $V$  — объем, охваченный пластической деформацией;  $S_u$  — поверхность, где заданы граничные условия в перемещениях;  $S_f$  — поверхность, где заданы граничные условия в напряжениях;  $S_s$  — поверхность, где известно нормальное перемещение

инструмента и учтен закон трения;  $T(\Lambda)$ ,  $\sigma(\varepsilon)$  – зависимости сопротивления деформации сдвига от степени деформации сдвига и среднего нормального напряжения от степени объемной деформации;  $\Lambda(T)$  и  $\varepsilon(\sigma)$  — обратные функции;  $\rho$  — плотность;  $(\omega_i$  и  $g_i^*$  – компоненты векторов ускорения и массовых сил;  $u_i$ ,  $f_i$  — компоненты вектора перемещения и поверхностных напряжений;  $f_{vi}$  и  $f_{ti}$  — компоненты вектора поверхностных напряжений в проекциях на нормальную и касательную плоскости;  $u_{vi}$  и  $u_{ti}$  — перемещения в проекциях на те же плоскости;  $u_{si}$  — перемещения на поверхности, где задан закон трения. Все перемещения предполагаются достаточно малыми, чтобы была справедливой геометрически линейная теория. Вообще говоря, здесь рассматривается малый отрезок времени  $\Delta t$ , а перемещения — суть приращения перемещений. Звездочками помечены величины, заданные граничными условиями. Варьирование производится по величинам, отмеченным штрихами. В дальнейшем рассмотрим случай достаточно медленного пластического течения, что позволяет упростить запись функционала, исключив из нее последнее слагаемое в первых квадратных скобках.

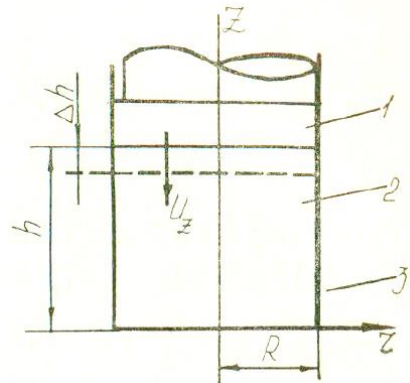


Рис. 1. Схема прессования пористой заготовки в контейнере (обозначения в тексте)

Рассмотрим в цилиндрической системе координат  $r\varphi z$  деформацию пористой заготовки заданной высоты  $h$  в контейнере (рис. 1). Перемещение пуансона 1 на  $\Delta h$  вызывает уплотнение заготовки 2, помещенной в контейнер 3. Вследствие действующих на поверхностях трения напряжений напряженное и деформированное состояние будет неоднородным.

Для осесимметричного случая характерно наличие четырех компонент тензора напряжений:  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{rz}$ . Для поля напряжений можно сформулировать следующие граничные условия:

$$\sigma_{rz}|_{r=0} = 0, \quad (1)$$

а на боковой поверхности цилиндра справедлив закон трения, например, по Кулону:

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} = \mu |\sigma_{rr}|_{r=R}, \quad (2)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения. Применив правило знаков для напряжений, снимем знаки модуля

$$\sigma_{rz}|_{r=R} = \mu \sigma_{rr}|_{r=R}. \quad (2a)$$

Статически возможные напряжения наряду с граничными условиями (1) и (2) должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия

$$\partial\sigma_{rr}/\partial r + \partial\sigma_{rz}/\partial z + \frac{(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})}{r} = 0; \quad (3)$$

$$\partial\sigma_{zz}/\partial z + \partial\sigma_{rz}/\partial r + \sigma_{rz}/r = 0. \quad (4)$$

Уравнение (3) существенно упростится, если принять гипотезу о том, что  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr}$ . Выберем статически возможное поле напряжений. Для этого зададим напряжение  $\sigma_{rz}$  с точностью до варьируемого параметра  $b_0$  с учетом граничного условия (1) в виде линейной функции от  $r$ :

$$\sigma_{rz} + b_0 r/R. \quad (5)$$

Интегрирование уравнения (3) позволит найти напряжение  $\sigma_{rr}$ :

$$\sigma_{rr} = -\int \left( \partial\sigma_{rz}/\partial z \right) dr + f(z) = f(z), \quad (6)$$

где  $f(z)$  — произвольная функция интегрирования. Напряжение  $\sigma_{zz}$  найдем из второго уравнения равновесия (4):

$$\sigma_{zz} = -\int \left[ \partial\sigma_{rz}/\partial r + \sigma_{rz}/r \right] dz + f_1(r) = -\frac{2b_0 z}{R} + f_1(r), \quad (7)$$

где  $f_1(r)$  — произвольная функция интегрирования. Примем  $f_1(r) = b_1$ , где  $b_1$  — варьируемый параметр. Допустим, ради простоты, что радиальные напряжения пропорциональны осевым, что не противоречит имеющимся опытным данным:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = k\sigma_{zz} = k\left(-\frac{2b_0 z}{R} + b_1\right), \quad (8)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Тогда интенсивность касательных напряжений

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{(\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2/3 + \sigma_{rz}^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{2b_0 z}{R} + b_1\right)^2 (1-k)^2/3 + b_0^2 r^2/R^2} \end{aligned} \quad (9)$$

и среднее нормальное напряжение

$$\sigma = -\frac{2b_0 z}{R} + b_1(1+2k)/3 \quad (10)$$

Удовлетворим условие (2а) в интегральной форме:

$$\int_0^h \sigma_{rz}|_{r=R} dz = -\mu \int_0^h \sigma_{rr}|_{r=R} dz$$

или

$$b_0 h = -\mu[2b_0 h^2/2R + b_1 h],$$

откуда

$$b_1 = -b_0\left(1/\mu - R/h\right)h/R.$$

Ограничимся рассмотрением случая  $h/R \gg \mu$ , что в действительности чаще всего и реализуется на практике, тогда  $b_0 = -\mu b_1 R/h$ . С учетом последнего исключим параметр  $b_0$  из формул (5), (8)...(10).

Выберем поле перемещений так:

$$u_z = \Delta h \frac{z}{h} \left[ -1 + a\left(1 - \frac{z}{h}\right) \right]; \quad u_r = 0, \quad (11)$$

где  $a$  — варьируемый параметр, что удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} u_z|_{z=0} &= 0; & u_z|_{z=h} &= -\Delta h; \\ u_r|_{r=0} &= 0; & u_r|_{r=R} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Дифференцируя (11), получим

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta h}{h} \left[ -1 + a \left( 1 - 2 \frac{z}{h} \right) \right]; \quad \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{rz} = 0.$$

Найдем степень деформации сдвига

$$\Lambda = \frac{2\varepsilon_{zz}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Delta h}{h} \left| -1 + a \left( 1 - 2 \frac{z}{h} \right) \right|,$$

а также степень деформации объема

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_{zz}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Delta h}{h} \left| -1 + a \left( 1 - 2 \frac{z}{h} \right) \right| \frac{\Delta h}{h}.$$

В условиях данной задачи функционал вариационного принципа приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} I = \int_V \left\{ \int_0^{\Lambda'} T d\Lambda + \int_0^{\varepsilon'} \sigma d\varepsilon + \int_0^{T'} \Lambda d\tau + \int_0^{\sigma'} \varepsilon d\sigma + \right\} dV - \\ - \int_{S_u} \sigma'_{zz}|_{z=h} u_z|_{z=h} dS - \int_{S_s} \sigma'_{rz}|_{r=R} u'_z|_{r=R} dS, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $S_u$  — поверхность торца пуансона;  $S_s$  — боковая поверхность контейнера.

Разложим функции  $T(\Lambda)$  и  $\sigma(\varepsilon)$  в ряд Тэйлора, ограничившись двумя членами ряда  $T = \tau_s + \alpha\Lambda$ ;  $\sigma = \sigma_0 + \beta\varepsilon$ ; где  $\alpha = \frac{\partial T}{\partial \Lambda}|_{\Lambda=0}$ ,  $\beta = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ ,  $\tau_s$  и  $\sigma_0$  — значения  $T$  и  $\sigma$ , предопределенные историей деформации на предыдущем этапе деформирования к началу отрезка времени  $\Delta t$ . С учетом этого вычислим интегралы в фигурных скобках формулы (13):

$$\begin{aligned} \int_0^{\Lambda'} (\tau_s + \alpha\Lambda) d\Lambda &= \tau_s \Lambda' + \alpha(\Lambda')^2/2; \int_0^{\varepsilon'} (\sigma_0 + \beta\varepsilon) d\varepsilon = \sigma_0 \varepsilon' + \beta(\varepsilon')^2/2; \\ \int_{\tau_s}^{T'} \frac{1}{\alpha} (T - \tau_s) dT &= \frac{1}{2\alpha} (T - \tau_s)^2; \int_{\sigma_0}^{\sigma'} \frac{1}{\beta} (\sigma - \sigma_0) d\sigma = \frac{1}{2\beta} (\sigma - \sigma_0)^2. \end{aligned}$$

Для упрощения решения допустим, что  $\tau_s$  и  $\sigma_0$  равны нулю, что справедливо в начальный период деформации пористого тела. Каждое из слагаемых в (13) продифференцируем по варьируемым параметрам и проинтегрируем по координатам, для удобства

записи обозначим эти слагаемые соответственно  $I^I, I^{II}, I^{III}, I^{IV}, I^V, I^{VI}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial I^I}{\partial a} &= \frac{4}{9} \alpha \pi \frac{\Delta h^2}{h} R^2 a; & \frac{\partial I^I}{\partial b_1} &= 0; \\ \frac{\partial I^{II}}{\partial a} &= \frac{1}{3} \pi \beta \frac{\Delta h^2}{h} R^2 a; & \frac{\partial I^{II}}{\partial b_1} &= 0; \\ \frac{\partial I^{III}}{\partial a} &= 0; & \frac{\partial I^{III}}{\partial b_1} &= 2\pi R^2 h \left\{ \frac{1}{6} (1-k)^2 \left[ \frac{4}{3} \mu^2 + 2\mu + 1 \right] + \right. \\ & & & \left. + \frac{1}{4} \frac{R^2}{h^2} \mu^2 \right\}; \\ \frac{\partial I^{IV}}{\partial a} &= 0; & \frac{\partial I^{IV}}{\partial b_1} &= \frac{\pi}{\beta} b_1 \frac{R^2 h}{9} \left( \frac{3}{4} \mu^2 + 2\mu + 1 \right) (1+2k)^2; \\ \frac{\partial I^V}{\partial a} &= 0; & \frac{\partial I^V}{\partial b_1} &= -\pi R^2 \Delta h (1+2\mu) .\end{aligned}$$

В последнем интеграле формулы (13) подвергаются варьированию лишь перемещения, поэтому

$$\frac{\partial I^{VI}}{\partial a} = 2\pi \frac{\Delta h^2}{h} R^2 a \left( \frac{2}{3} \alpha + \frac{1}{2} \beta \right) + \frac{1}{3} \pi R^2 \mu \Delta h b_1 = 0 ,$$

отсюда

$$a = - \frac{\mu b_1}{\left[ 2 \frac{\Delta h}{h} \left( \frac{2}{3} \alpha + \frac{1}{2} \beta \right) \right]} . \quad (14)$$

Коэффициент  $a$  характеризует неравномерность распределения деформации по высоте заготовки. Из последней формулы видно, что неравномерность деформации тем больше, чем больше коэффициент трения, при  $\mu = 0$  обеспечивается однородная деформация.

Из второго вариационного уравнения получим

$$\frac{2}{\alpha} b_1 h \left[ \frac{1}{6} (1-k)^2 D + \frac{1}{4} \frac{R^2}{h^2} \mu^2 \right] + \frac{1}{9\beta} b_1 h D (1+2k) + \Delta h (1+2\mu) = 0 ,$$

где

$$D = \frac{4}{3} \mu^2 + 2\mu + 1 ,$$

откуда возможно определить параметр  $b_1$ :

$$b_1 = \frac{(1+2\mu)/h}{\frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{3}(1-k)^2 D + \frac{1}{2} \frac{R^2}{h^2} \mu^2 \right) + \frac{1}{9\beta} D(1+2k)^2}. \quad (15)$$

С учетом (14) и (15) удастся однозначно определить векторное поле перемещений и поле напряжений. Наиболее интересным представляется определение степени объемной деформации в функции координаты  $z$ . Имеющиеся литературные данные [5] указывают на падение плотности заготовки по мере удаления от активного (перемещающегося) пуансона. Построенная на рис. 2 зависимость  $\varepsilon$  от координаты  $z$  согласуется с этими данными, причем подтверждается и известный характер зависимости плотности от коэффициента трения  $\mu$ .

Таким образом, применение обобщенного вариационного принципа позволяет оценить влияние напряжения на характер деформированного состояния.

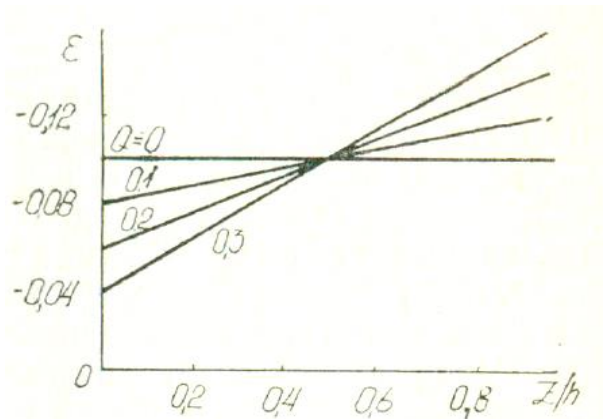


Рис. 2. Зависимость степени деформации объема от относительной координаты  $z/h$  и параметра

$$Q = -\frac{\mu b_1}{\left[ 2 \left( \frac{2}{3} \alpha + \frac{1}{2} \beta \right) \right]}; \quad \frac{\Delta h}{h} = 0,1$$

### Библиографический список

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983. Т. 2. 528 с.
2. Гун Г. Я. Теоретические основы обработки металлов давлением. Теория пластичности: Учебник для вузов. М.: Металлургия, 1980. 456 с.
3. Теория пластических деформаций металлов / Унксов Е. П., Джонсон У., Колмогоров В. Л. и др.; Под ред. Е. П. Унксова, А. Г. Овчинникова. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.
4. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением: Учебник для вузов. М.: Металлургия, 1986. 688 с.
5. Кипарисов С. С., Либенсон Г. А. Порошковая металлургия. М.: Металлургия, 1980. 496 с.